
Cognome e nome .... Firma .... Matricola ....

Corso di Laurea: ♢ MECLT ♢ MATLT ♢ AUTLT ♢ EDIQQ

Istruzioni

1. COMPILARE la parte precedente queste istruzioni, in particolare, **scrivere cognome e nome (in stampatello), firmare, indicare il numero di matricola e segnare il proprio corso di laurea.**
2. SCRIVERE, in modo incontrovertibile, la risposta nello spazio lasciato dopo ogni quesito; in caso di correzione, barrare la risposta errata e scrivere accanto la nuova risposta.
3. I PUNTEGGI attribuiti per la risposta esatta sono indicati alla fine di ogni quesito.
4. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori.
5. CONSEGNARE **il foglio A e tutti i fogli di protocollo**.
6. TENERE il foglio B come promemoria delle risposte date.
7. TEMPO a disposizione: 150 min.

---

1. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e sia f la funzione definita da $f(x,y) = \log(4-x^2) + \sqrt{1-y^2} + \sqrt{\alpha - x - y}$. Determinare il dominio A di f al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

   ....

   Risposta [4 punti]: se $\alpha \leq -3$ è l'insieme vuoto, se $-3 < \alpha < 3$, $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < 2\,, |y| \leq 1\,, x+y \leq \alpha\}$, se $\alpha \geq 3$, $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < 2\,, |y| \leq 1\,\}$.

---

2. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x,y) = yx^2(x-y) + 3$. Determinare e classificare i punti di stazionarietà di f.

   ....

   Risposta [Stazionarietà 2 punti, classificazione 2 punti]: stazionari i punti dell'asse y, tutti massimi eccetto $(0,0)$ che è di sella.

---

3. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Il campo vettoriale

$$\vec{G}(x,y) = \frac{x\log(x^2+2y^2)}{x^2+2y^2}\,\vec{i}_1 + \frac{(\alpha-1)2y\log(x^2+2y^2)}{x^2+2y^2}\,\vec{i}_2$$

   è un gradiente in $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\}$ se e solo se

   ....

   Risposta [4 punti]: $\alpha = 2$

---

4. Calcolare il flusso del rotore del campo vettoriale $\vec{F}(x,y) = (2x-y)\,\vec{i}_1 - yz^2\,\vec{i}_2 + z^2\,\vec{i}_3$ attraverso la superficie $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1, z \leq 0\}$.

. . . .

Risposta [4 punti]: π

---

5. Si studi, al variare di $\beta \in \mathbb{R}$, la convergenza della serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x+1)^{2n}}{(n!)^{\beta}}\,;$$

si calcoli, se possibile, la somma nei casi $\beta = 0$ e $\beta = 1$.

Risposta [4 punti]: con $(x+1)^2 = t$ serie di potenze, raggio 1 se $\beta = 0$, ∞ se $\beta > 0$, 0 se $\beta < 0$; sul bordo oscilla; somme $-\frac{(x+1)^2}{1+(x+1)^2}$ e $e^{-(x+1)^2} - 1$.

---

6. Calcolare l'area della superficie cilindrica di equazione $x^2+y^2 = 4$, contenuta fra il piano $z = 0$ e il piano $z = 4+x+y$ *(tenere presente il significato geometrico dell'integrale curvilineo rispetto alla lunghezza d'arco...).*

. . . .

Risposta [4 punti]: 16π

---

7. Si consideri il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = e^{y^2-4y+3} - 1 \\ y(0) = y_0\,. \end{cases}$$

Discutere l'applicabilità dei teoremi di esistenza ed unicità (locale e globale); studiare monotonia, concavità e flessi delle soluzioni al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$.

. . . .

Risposta [4 punti]: Unicità per ogni $y_0 \in \mathbb{R}$; $y_0 = 1$ e $y_0 = 3$ soluzioni stazionarie; c'è esistenza globale per $1 \leq y_0 \leq 3$, mentre altrove non è garantita; per $y_0 < 1$ crescente e concava, per $1 < y_0 < 3$ decrescente e con flesso per $y = 2$, per $y_0 > 3$ crescente e convessa; $y = 3$ asintoto orizzontale per $t \to -\infty$ per $y_0 > 1$, $y = 1$ asintoto orizzontale per $t \to +\infty$ per $y_0 < 3$.

---

8. Siano $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ con $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ e $\vec{r} : [-4,5] \to \mathbb{R}^2$ con $\vec{r}(t) = t\,\vec{i}_1 + t^2\,\vec{i}_2$. Sia $g : [-4,5] \to \mathbb{R}$ tale che $g = f \circ \vec{r}$. Sapendo che $\nabla f(-1,1) = 2\vec{i}_1 + 3\vec{i}_2$, $g'(-1)$ vale

. . . .

Risposta [4 punti]:-4

---

1. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e sia f la funzione definita da $f(x,y) = \log(4-x^2) + \sqrt{1-y^2} + \sqrt{\alpha - x - y}$. Determinare il dominio A di f al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

   ....

   Risposta [4 punti]: se $\alpha \leq -3$ è l'insieme vuoto, se $-3 < \alpha < 3$, $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < 2\,, |y| \leq 1\,, x+y \leq \alpha\}$, se $\alpha \geq 3$, $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < 2\,, |y| \leq 1\,\}$.

---

2. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x,y) = yx^2(x-y) + 3$. Determinare e classificare i punti di stazionarietà di f.

   ....

   Risposta [Stazionarietà 2 punti, classificazione 2 punti]: stazionari i punti dell'asse y, tutti massimi eccetto $(0,0)$ che è di sella.

---

3. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Il campo vettoriale

$$\vec{G}(x,y) = \frac{x\log(x^2+2y^2)}{x^2+2y^2}\,\vec{i}_1 + \frac{(\alpha-1)2y\log(x^2+2y^2)}{x^2+2y^2}\,\vec{i}_2$$

   è un gradiente in $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\}$ se e solo se

   ....

   Risposta [4 punti]: $\alpha = 2$

---

4. Calcolare il flusso del rotore del campo vettoriale $\vec{F}(x,y) = (2x-y)\,\vec{i}_1 - yz^2\,\vec{i}_2 + z^2\,\vec{i}_3$ attraverso la superficie $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \, x^2+y^2+z^2 = 1, z \leq 0\}$.

   ....

   Risposta [4 punti]: π

---

5. Si studi, al variare di $\beta \in \mathbb{R}$, la convergenza della serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x+1)^{2n}}{(n!)^{\beta}}\,;$$

   si calcoli, se possibile, la somma nei casi $\beta = 0$ e $\beta = 1$.

Risposta [4 punti]: con $(x+1)^2 = t$ serie di potenze, raggio 1 se $\beta = 0$, ∞ se $\beta > 0$, 0 se $\beta < 0$; sul bordo oscilla; somme $-\frac{(x+1)^2}{1+(x+1)^2}$ e $e^{-(x+1)^2} - 1$.

---

6. Calcolare l'area della superficie cilindrica di equazione $x^2 + y^2 = 4$, contenuta fra il piano $z = 0$ e il piano $z = 4+x+y$ *(tenere presente il significato geometrico dell'integrale curvilineo rispetto alla lunghezza d'arco...)*.

....

Risposta [4 punti]: 16π

---

7. Si consideri il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = e^{y^2-4y+3} - 1 \\ y(0) = y_0 \, . \end{cases}$$

Discutere l'applicabilità dei teoremi di esistenza ed unicità (locale e globale); studiare monotonia, concavità e flessi delle soluzioni al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$.

....

Risposta [4 punti]: Unicità per ogni $y_0 \in \mathbb{R}$; $y_0 = 1$ e $y_0 = 3$ soluzioni stazionarie; c'è esistenza globale per $1 \le y_0 \le 3$, mentre altrove non è garantita; per $y_0 < 1$ crescente e concava, per $1 < y_0 < 3$ decrescente e con flesso per $y = 2$, per $y_0 > 3$ crescente e convessa; $y = 3$ asintoto orizzontale per $t \to -\infty$ per $y_0 > 1$, $y = 1$ asintoto orizzontale per $t \to +\infty$ per $y_0 < 3$.

---

8. Siano $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ con $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ e $\vec{r} : [-4, 5] \to \mathbb{R}^2$ con $\vec{r}(t) = t\,\vec{i}_1 + t^2\,\vec{i}_2$. Sia $g : [-4, 5] \to \mathbb{R}$ tale che $g = f \circ \vec{r}$. Sapendo che $\nabla f(-1, 1) = 2\vec{i}_1 + 3\vec{i}_2$, $g'(-1)$ vale

....

Risposta [4 punti]:-4
